Matrix Multiplication

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad \xrightarrow{R} \quad \downarrow C$$

&

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_3 & a_1 b_2 + a_2 b_4 \\ a_3 b_1 + a_4 b_3 & a_3 b_2 + a_4 b_4 \end{bmatrix}$$

1) Multiply $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 1 + (-1) \times 3 & 2 \times 2 + (-1) \times 4 \\ 3 \times 1 + 2 \times 3 & 3 \times 2 + 2 \times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 - 3 & 4 - 4 \\ 3 + 6 & 6 + 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 9 & 14 \end{bmatrix} \text{ Ans}$$

2) If $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ then $AB = ?$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1\times 1 + (-1)\times 3 & 1\times 2 + (-1)\times 4 \\ 2\times 1 + 3\times 3 & 2\times 2 + 3 \times 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1-3 & 2-4 \\ 2+9 & 4+12 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$ (Ans)

3) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ then prove that $AB = BA$

$\rightarrow \therefore AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1\times 1 + 2\times 0 & 1\times 0 + 2\times 1 \\ 3\times 1 + 4\times 0 & 3\times 0 + 4\times 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore BA =$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1 + 0\times3 & 1\times2 + 0\times4 \\ 0\times1 + 1\times3 & 0\times2 + 1\times4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$\therefore AB = BA$ (proved)

4) If $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$ then $AB = ?$

$\rightarrow AB \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha \\ \sin\alpha + 0 & \cos\alpha + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin 2\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \text{ (Ans)}$$

5) If $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ then $AB - BA = ?$

→ $AB = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2+63 & 10+18 \\ 4+21 & 20+6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 65 & 28 \\ 25 & 26 \end{bmatrix}$

→ $BA = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2+20 & 9+15 \\ 14+8 & 63+6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 22 & 24 \\ 22 & 69 \end{bmatrix}$

∴ $AB - BA$

$= \begin{bmatrix} 65 & 28 \\ 25 & 26 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 22 & 24 \\ 22 & 69 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 43 & 4 \\ 3 & -43 \end{bmatrix}$ A

6) If $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ Find the product of AB

$\rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0-1+4 & 0+0+2 & 0+0+0 \\ 1-2+6 & -2+0+3 & 0+0+0 \\ 2-3+8 & -4+0+4 & 0+0+0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ (Ans)

7) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ Find the product of BA

$\rightarrow B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2+0+0 & 0+0+0 & 2+0+0 \\ 0+0+0 & 0+2+0 & 0+0+0 \\ 2+0+0 & 0+2+0 & 2+0+0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (Ans)

8) If $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ then $I_3^2 + 2I_3 = ?$

$\rightarrow \therefore I_3^2 = I_3 \times I_3$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 2I_3 = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore I_3^2 + 2I_3$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ (Ans)}$$

$$= 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 3I_3 \text{ (Ans)}$$